

Etats spatialement localisés dans la convection de double diffusion

C. Beaume^{a,b}, A. Bergeon^{a,b}, E. Knobloch^c

- a. *Université de Toulouse; INPT; UPS; IMFT (Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse);
Allée Camille Soula, F-31400 Toulouse, France*
b. *CNRS; IMFT; F-31400 Toulouse, France*
c. *Department of Physics, University of California at Berkeley, Berkeley, California 94720, USA*

Résumé :

Une méthode numérique de continuation est utilisée pour étudier les états stationnaires spatialement localisés dans la convection de double diffusion au sein d'une couche bi-dimensionnelle d'un fluide binaire confiné entre deux parois horizontales munies de conditions aux limites de non-glissement. La concentration du composant le plus lourd est maintenue supérieure à la paroi inférieure et la convection induite par une différence de température imposée entre le haut et le bas. Dans une certaine gamme de paramètres, des états spatialement localisés appelés convectons se forment. L'origine et les propriétés de ces états sont étudiées et reliées au phénomène d'homoclinic snaking.

Abstract :

Numerical continuation is used to investigate stationary spatially localized states in two-dimensional doubly diffusive convection in a plane layer with no-slip boundary conditions at top and bottom. Concentration of the heavier component is maintained at the boundaries, with the concentration at the bottom higher than at the top. Convection is driven by an imposed temperature difference across the layer. In appropriate parameter regimes the system exhibits spatially localized states called convectons. The origin and properties of these states are discussed and related to the phenomenon of homoclinic snaking.

Mots clefs : instabilités, double diffusion, états spatialement localisés

1 Introduction

Les instabilités de double diffusion font habituellement référence à l'apparition spontanée de convection induite par des variations de concentration et de température au sein d'un mélange fluide provoquant des gradients de densité qui en retour induisent des mouvements du fluide par le jeu des forces gravitationnelles. Ce mécanisme est connu depuis les années soixante pour être à l'origine d'une très large variété de comportements hydrodynamiques dont les caractéristiques dépendent de l'orientation et de l'amplitude relative des gradients thermiques et solutaux. Il est présent dans une large gamme de situations et d'échelles incluant les applications océanographiques [8, 13, 16] ou les procédés de solidification [18].

Dans ce travail, on s'intéresse à la structuration des écoulements stationnaires apparaissant par suite de l'instabilité de double-diffusion lorsqu'une couche fluide bidimensionnelle de grande extension horizontale formée d'un mélange binaire est placée entre deux surfaces rigides maintenues à des températures et concentrations imposées constantes. On considère la situation dans laquelle le fluide est chauffé par le bas c'est-à-dire stratifié instable en température mais stratifié stable en concentration. On note dans la suite H l'épaisseur de la couche fluide dans la direction verticale z et L son extension horizontale dans la direction x et l'on définit le rapport d'aspect de la géométrie $\Gamma = L/H$ (figure 1).

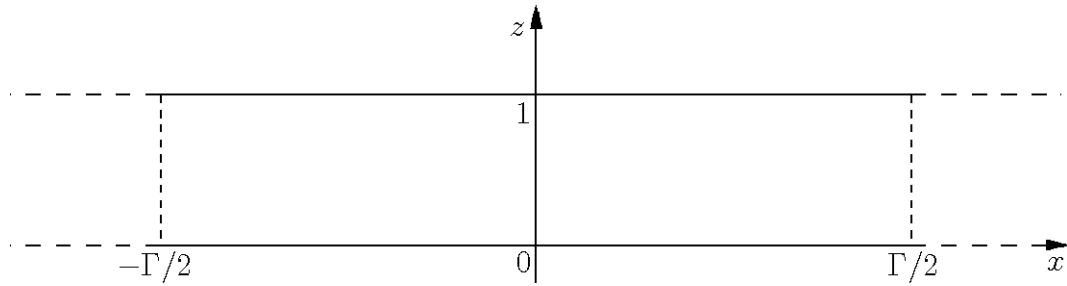


FIG. 1 – Vue schématique de la géométrie en variables adimensionnées.

On ne considère pas les effets de diffusion croisée (Dufour et Soret) et l'on se place dans le cadre de l'approximation de Boussinesq.

En adimensionalisant les équations par H pour les longueurs, H^2/κ pour les temps et les différences de température et de concentration imposées entre les deux surfaces rigides $\Delta T, \Delta C > 0$ pour la température et la concentration, les équations de conservation s'écrivent :

$$Pr^{-1}(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} + (RaT - Ra_s C) \mathbf{e}_z, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\partial_t T + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \nabla^2 T, \quad (3)$$

$$\partial_t C + (\mathbf{u} \cdot \nabla) C = \tau \nabla^2 C, \quad (4)$$

où \mathbf{u} est le champ de vitesse, p la pression, T la température et C la concentration. Les nombres adimensionnels sont le nombre de Prandtl $Pr = \nu/\kappa$ où κ est la diffusivité thermique et ν la viscosité cinématique, le nombre de Lewis $\tau = D/\kappa$ où D est la diffusivité solutale, et les nombres de Rayleigh thermique et solutal respectivement égaux à $Ra = g|\rho_T|\Delta TH^3/(\rho_0\nu^2)$ et $Ra_s = g\rho_C\Delta CH^3/(\rho_0\nu^2)$ où g est l'accélération de la pesanteur, ρ_0 la densité de référence et ρ_T, ρ_C les coefficients d'expansion thermique et solutale ($\rho_T < 0, \rho_C > 0$). Dans la suite, on maintiendra $Ra_s = 500$. Les conditions aux limites associées incluent le non-glissement le long des surfaces rigides $z = 0, 1$:

$$\mathbf{u} = T = C = 0 \quad \text{en } z = 1, \quad (5)$$

$$\mathbf{u} = T - 1 = C - 1 = 0 \quad \text{en } z = 0, \quad (6)$$

et l'on suppose les champs Γ -périodiques dans la direction x . Le système décrit ci-dessus possède une solution triviale, $T = C = 1 - z, \mathbf{u} = 0$, dite solution conductive, invariante quels que soient les paramètres adimensionnels. Les symétries du problème sont les symétries du groupe $O(2) \times Z_2$. Le groupe $O(2)$ est généré par les translations continues dans la direction x et la réflexion R_1 par rapport à l'axe $x = x_0$ où x_0 est arbitraire dans le domaine (par la suite on choisit $x_0 = 0$), $R_1 : (x, z) \rightarrow (-x, z), (u, w, \Theta, \Sigma) \rightarrow (-u, w, \Theta, \Sigma)$ où l'on a noté $T = 1 - z - \Theta, C = 1 - z - \Sigma$ et (u, w) les composantes de \mathbf{u} dans les directions x et z . Le groupe Z_2 est généré par la réflexion par rapport à l'axe $z = 1/2$: $R_2 : (x, z) \rightarrow (x, 1 - z), (u, w, \Theta, \Sigma) \rightarrow (u, -w, -\Theta, -\Sigma)$. Ces propriétés de symétries garantissent que les bifurcations issues de la solution conductive seront des bifurcations fourches de révolution produisant des solutions spatialement périodiques.

Les équations sont discrétisées spatialement par une méthode aux éléments spectraux et le schéma d'intégration temporelle adopté est une méthode de projection [9]. Sur ce schéma est implantée une méthode de continuation [12, 15] permettant de suivre avec Ra les solutions stationnaires et de déterminer leur stabilité.

2 Résultats

Deux types de solutions stationnaires sont susceptibles d'apparaître : les solutions périodiques de longueur d'onde $\lambda \ll \Gamma$, et les solutions de période Γ . Pour simplifier l'exposé, on qualifie les premières de périodiques et les autres de spatialement localisées.

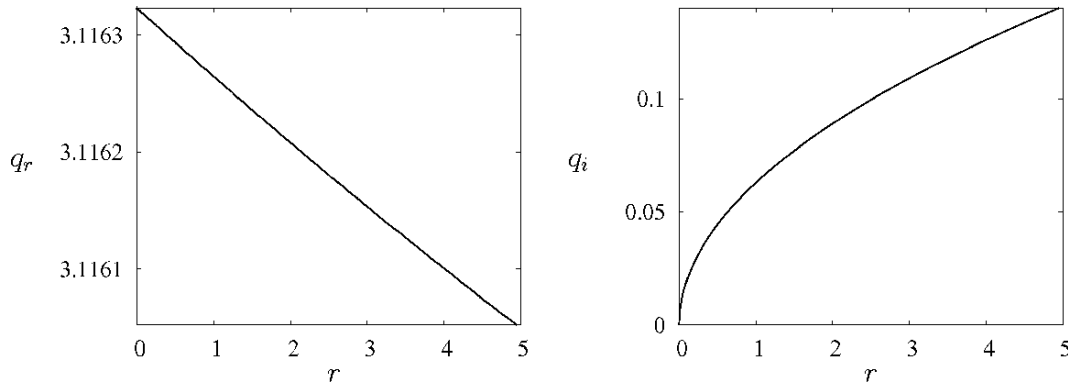


FIG. 2 – Évolution de la partie réelle q_r et de la partie imaginaire q_i en fonction de l'écart au seuil $r = Ra_c - Ra$.

Pour comprendre l'origine des solutions spatialement localisées on considère d'abord le cas d'une couche infinie dans la direction x . On cherche des conditions dans lesquelles apparaissent des solutions convectives dont l'amplitude croît de la solution conductive en $x = -\infty$ vers une structure convective puis redécroit vers la solution conductive en $x = +\infty$. Le système d'équations est donc linéarisé autour de la solution conductive et les perturbations développées sous la forme $e^{iqx}(\tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{\Theta}, \tilde{\Sigma})(z)$ où $q = q_r + iq_i$. De manière classique [3], les dépendances en z sont développées sur une base de polynômes de Chebyshev et les champs introduits dans le système d'équations et de conditions aux limites pour former un système non-linéaire dont les inconnues sont q , Ra et les coefficients du développement. En fixant q_i , on résout le système par une méthode de Newton pour différentes valeurs de q_r , le minimum de la courbe $Ra(q_r)$ donnant la valeur critique cherchée [1, 3, 4]. Lorsque $q_i = 0$, l'analyse donne le seuil classique d'instabilité linéaire temporelle de la solution conductive pour les bifurcations stationnaires, soit $Ra_c = 9202.76$ avec $q_r = q_c = 3.1163$. Les variations de q_r et q_i avec l'écart au seuil $Ra_c - Ra$ sont reportées sur la figure 2. Les résultats montrent qu'au seuil Ra_c , les valeurs propres $q = \pm q_r$ ont une multiplicité de 2. Au dessus du seuil, $Ra > Ra_c$, les valeurs propres q sont réelles. En revanche, lorsque $Ra < Ra_c$, les valeurs propres forment un quartet de la forme $\pm q_r \pm i\alpha(Ra_c - Ra)^{1/2}$. L'état conductif est hyperbolique en espace et donc si des états spatialement localisés existent, ils existent pour les valeurs $Ra < Ra_c$.

La présence de branches d'états spatialement localisés est analysée pour un domaine de grand rapport d'aspect $\Gamma = 10\lambda_c$ (où λ_c est la longueur d'onde critique de l'instabilité stationnaire $\lambda_c = 2\pi/q_c = 2.0162$) muni de conditions aux limites périodiques dans la direction x . Le diagramme de bifurcation est présenté en figure 3.

L'analyse linéaire de stabilité de la solution conductive révèle que la première bifurcation est une bifurcation de Hopf à $Ra_H = 2239$. La première bifurcation vers des solutions stationnaires se produit pour $Ra_c = 9207.76$. Elle crée une branche sous-critique notée P_{10} de solutions périodiques formées de 10 longueurs d'onde (10 paires de rouleaux contra-rotatifs). Elle est suivie par une seconde bifurcation primaire associée à la branche P_{11} formée de solutions à 11 paires de rouleaux contra-rotatifs. La branche P_{10} est initialement instable et passe par un noeud-col en $Ra_{SN} = 2415$. Une bifurcation secondaire prend place le long de P_{10} pour $Ra = 9195$ et donne naissance à deux branches secondaires notées L_{10}^{1+} et L_{10}^{1-} . Ces dernières sont associées aux solutions spatialement localisées prédites par l'analyse linéaire précédente de la couche infinie. Le fait qu'elles ne bifurquent pas de la solution primaire simultanément à la branche de solutions périodiques est un effet de la périodicité Γ du domaine de calcul discuté en détail par Bergeon *et al.* [5].

Les solutions spatialement localisées associées sont représentées sur la figure 4. Sur chaque branche, les solutions possèdent des symétries différentes : la branche L_{10}^{1+} correspond à des solutions comportant un nombre pair de rouleaux (solutions R_1 invariantes) et la branche L_{10}^{1-} un nombre impair de rouleaux

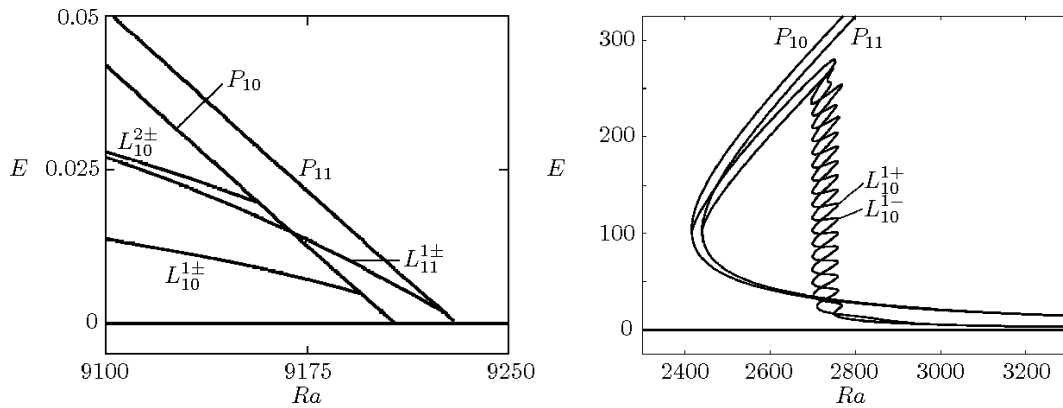


FIG. 3 – Diagramme de bifurcation représentant l'énergie cinétique E en fonction du nombre de Rayleigh thermique Ra . À gauche, les bifurcations primaires générant les branches P_{10} et P_{11} associées à des structures formées respectivement de 10 et 11 paires de rouleaux contra-rotatifs. Le long de P_{10} apparaît une bifurcation secondaire donnant naissance aux branches L_{10}^{1+} et L_{10}^{1-} associées aux états spatialement localisés. D'autres bifurcations secondaires créent des états localisés multi-pulse : $L_{11}^{1\pm}$ et $L_{10}^{2\pm}$. À droite, la partie sous-critique du diagramme où les branches d'états localisés oscillent entre $Ra = 2700$ et $Ra = 2760$. Cette zone est appelée région de *snaking*. Par souci de clarté, les branches $L_{11}^{1\pm}$ et $L_{10}^{2\pm}$ ne sont pas représentées sur la figure de droite.

(solutions $R_1 \circ R_2$ invariantes). Au voisinage du point de bifurcation, la structure de chacune de ces branches présente des solutions périodiques modulées par un mode $n = 1$ *i.e.* la modulation spatiale est de période $\Gamma/n = \Gamma$. Les deux branches ne sont pas liées par des propriétés de symétrie. Initialement proches (en terme d'énergie cinétique), elles se séparent lorsque Ra décroît à mesure que la modulation spatiale s'accroît. Peu avant le premier noeud-col, ces solutions forment des états spatialement localisés consistant respectivement pour L_{10}^{1+} et L_{10}^{1-} en 4 et 3 rouleaux contra-rotatifs centrés au milieu du domaine. Entre $Ra = 2700$ et $Ra = 2760$, les branches effectuent une série d'allers-retours dans l'espace des paramètres, chaque aller-retour étant associé à l'étalement de la structure convective par ajout de rouleaux de part et d'autre de sorte à maintenir les propriétés initiales d'invariance par symétrie. Ce processus, connu sous le nom d'*homoclinic snaking*, se poursuit jusqu'au remplissage du domaine. Lorsque le domaine est rempli, les branches d'états localisés sortent de la région de *snaking*. Elles se reconnectent ensuite chacune par une bifurcation secondaire sur les branches P_{10} et P_{11} de solutions périodiques.

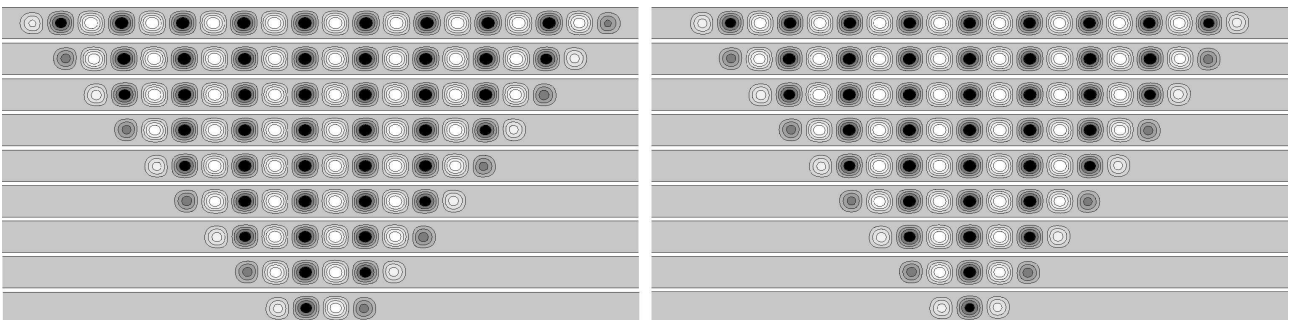


FIG. 4 – Représentation de l'écoulement par les isovaleurs de la fonction de courant pour chacun des noeuds-cols de droite de la région de *snaking* pour L_{10}^{1+} (gauche) et L_{10}^{1-} (droite). Les solutions en haut correspondent aux noeuds-cols les plus hauts de la figure 3.

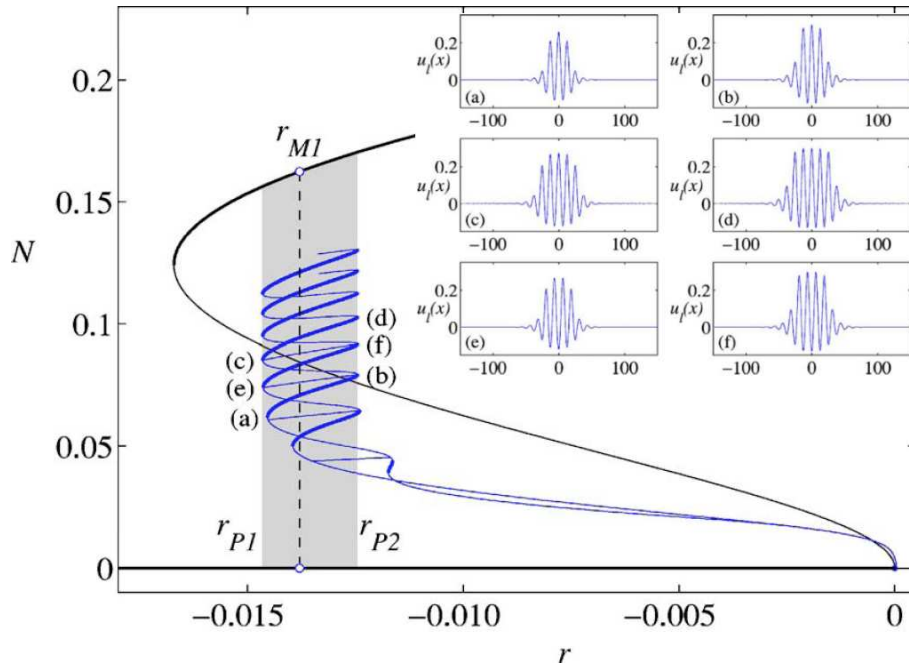


FIG. 5 – Diagramme de bifurcation représentant les solutions de l'équation de Swift–Hohenberg 1D $\partial_t u = ru - (\partial_x^2 + q_c^2)u + \nu u^2 - gu^3$ avec $q_c = 0.5$, $\nu = 0.41$, $g = 1$. L'insert présente différentes solutions à différents noeuds-cols. D'après [7].

3 Discussion

Le mécanisme que nous avons identifié de création de ces états localisés amène également la formation d'états multi-pulses (non présentés ici mais associés notamment aux branches $L_{10}^{2\pm}$ et $L_{11}^{1\pm}$ de la figure 3) constitués de plusieurs groupements d'états spatialement localisés pouvant chacun posséder des symétries différentes [11]. Il conduit au final à former une région de l'espace des paramètres dans laquelle existe une très importante multiplicité d'états stationnaires linéairement stables ou instables. Pour les paramètres de notre étude, ces solutions sont instables mais elles impactent de manière significative et sur une gamme de paramètres très étendue la dynamique non-linéaire instationnaire [2].

Dans le contexte de la convection, ces états spatialement localisés sont baptisés convectons dans le régime stationnaire et oscillons dans le régime périodique. Des structures de ce type ont été mises en évidence dans d'autres contextes dont la magnétohydrodynamique [6], les écoulements cisailés [14] ou les milieux granulaires en présence de vibrations [17]. Le mécanisme d'homoclinic snaking qui conduit à leur formation a été analysé en détail sur des équations modèles et en particulier sur l'équation de Swift–Hohenberg. La figure 5 présente un diagramme de bifurcation obtenu par Burke et Knobloch [7] pour cette équation. Il est surprenant de remarquer que malgré le caractère conservatif de l'équation, le diagramme de bifurcation présente de fortes similitudes avec celui que nous avons mis en évidence sur la figure 3. La figure 5 met en évidence une bifurcation sous-critique en $r = 0$ conduisant à la formation d'une branche de solutions périodiques passant par un noeud-col. Très proche de $r = 0$, on observe une bifurcation secondaire le long de cette branche produisant deux branches sous-critiques effectuant des allers-retours dans l'espace des paramètres entre r_{P1} et r_{P2} autour de la valeur r_{MI} associée au point de Maxwell [7]. Ces branches, qui correspondent aux états spatialement localisés, évoluent de la même façon que celles que nous avons obtenues dans notre problème : la solution présente initialement un faible nombre d'oscillations en bas de la région de snaking puis, à chaque aller-retour dans l'espace des paramètres, une oscillation est ajoutée de part et d'autre de la solution. Une discussion approfondie du mécanisme incluant des questions ouvertes est présentée dans [10].

Références

- [1] Assemat P., Bergeon A., Knobloch E., 2008. Spatially localized states in Marangoni convection in binary mixtures. *Fluid Dyn. Res.* **40** 852-876
- [2] Beaume C., Bergeon A., Knobloch E., 2011. Homoclinic snaking of localized states in doubly diffusive convection *Soumis à Phys. Fluids*
- [3] Bergeon A., Mollaret R., Henry D., 2003. Soret effect and slow mass diffusion as a catalyst for overstability in Marangoni-Bénard flows. *Heat Mass Trans.* **40** 105-114.
- [4] Bergeon A., Knobloch E., 2008. Spatially localized states in natural doubly diffusive convection. *Phys. Fluids* **20** 034102.
- [5] Bergeon A., Burke J., Knobloch E., Mercader I., 2008. Eckhaus instability and homoclinic snaking *Phys. Rev. E* **78** 046201
- [6] Blanchflower S., 1999. Magnetohydrodynamic convectons *Phys. Lett. A* **261** 74-81
- [7] Burke J., Knobloch E., 2006, Localized states in the generalized Swift-Hohenberg equation *Phys. Rev. E* **73** 056211
- [8] Hansen U., Yuen D. A., 1990. Nonlinear physics of double-diffusive convection in geological systems *Earth Science Reviews* **29** 385-399
- [9] Karniadakis G. E., Israeli M., Orszag S. A., 1991. High-order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations *J. Comp. Phys.* **97** 414-443
- [10] Knobloch E., 2008. Spatially localized structures in dissipative systems : open problems *Nonlinearity* **21** 45-60
- [11] Lo Jacono D., Bergeon A., Knobloch E., 2010. Spatially localized binary fluid convection in a porous medium *Phys. Fluids* **22** 073601
- [12] Mamun C. K., Tuckerman L. S., 1995. Asymmetry and Hopf bifurcation in spherical Couette flow *Phys. Fluids* **7** 80-91
- [13] Schmitt R. W., 1994. Double diffusion in oceanography *Annu. Rev. Fluid Mech.* **26** 255-285
- [14] Schneider T. M., Gibson J. F., Burke J., 2010. Snakes and ladders : localized solution of plane Couette flow *Phys. Rev. Lett.* **104** 104501
- [15] Tuckerman L. S., 1989. Steady-state solving via Stokes preconditioning : Recursion relations for elliptic operators, in "11th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics" *Lecture Notes in Physics* **323** 573-577
- [16] Turner J. S., 1965. The coupled turbulent transports of salt and heat across a sharp density interface *Int. J. Heat Mass Transfer* **8** 759-760
- [17] Umbanhowar P. B., Melo F., Swinney H. L., 1996. Localized excitations in a vertically vibrated granular layer *Nature* **382** 793-796
- [18] Wilcox W. R., 1993. Transport phenomena in crystal growth from solution *Prog. Cryst. Growth Charact. Mater.* **26** 153-194